6 Permutacijske grupe

Definicija (permutacij množice A, grupa permutacij množice A)

Permutacij množice A je bijekcija iz A v A.

Množica vseh permutacij množice A je grupa glede na operacijo kompozicije funkcij. To grupo imenujemo grupa permutacij množice A.

1. (a) Podaj primer permutacije množice $\{1,2,3,4\}$. Dobjeno permutacijo α napiši v vrstni obliki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \alpha(4) \end{pmatrix}$. [$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$]

(b) Permutacijo $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ množice $\{1,2,3,4,5,6\}$ prikaži grafično (s pomočjo Vene-ovega diagrami), in izračunaj $\beta(3)$, $\beta(5)$ in $\beta(6)$. [$\beta(3) = 1$, $\beta(5) = 2$, $\beta(6) = 4$]

(c) Dana sta permotacij $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ in $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ množice $\{1,2,3,4,5\}$.

Izračunaj $\gamma\sigma$ in $\sigma\gamma$. [$\gamma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$]

Definicija (simetrična grupa S_n)

Grupa vseh permutacij množice $\{1, 2, ..., n\}$ se imenuje simetrična grupa reda n in se označuje z S_n. Elementi grupe S_n imajo obliko $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & ... & \alpha(n) \end{pmatrix}$.

2. (a) Napiši vse elemente grupe S_3. Ali je S_3 abelska grupa? [$|S_3| = 6$]

(b) Dani so elementi $a, b, c \in S_4$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Določi red grupe $\langle a, b, c \rangle$. [$|\langle a, b, c \rangle| = 4$]

3. Določi red grupe S_n. [$|S_n| = n!$]

Definicija (cikli permutacije)

Naj bo $\sigma \in S_n$. Če obstaja niz $x_1, x_2, ..., x_r \in \{1, 2, ..., n\}$, tak da je

$\sigma(x_i) = x_{i+1}$ $(i = 1, 2, ..., r-1)$

$\sigma(x_r) = x_1$ $(i = 1, 2, ..., r-1)$

$\sigma(x) = x$ $(x \notin \{x_1, x_2, ..., x_r\})$

tedaj permutacijo σ označimo z $(x_1\, x_2 \ldots x_{r-1}\, x_r)$ in jo imenujemo cikel dolžine r. Cikel dolžine dva (2-cikel) se imenuje transpozicij.

Dva cikla $(a_1\, a_2 \ldots a_r)$ in $(b_1\, b_2 \ldots b_s)$ sta disjunktna če in samo če sta množici $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ in $\{b_1, b_2, ..., b_s\}$ disjunktni.

4. (a) Permutaciji $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ napiši kot produkt disjunktnih ciklov (v cikličnem zapisu), potem pa izračunaj $\alpha\beta$. [$\alpha = (12)(45)$, $\beta = (153)(24)$, $\alpha\beta = (14)(253)$]

(b) Permutacijo $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ napiši v cikličnem zapisu. [$\mathrm{id} = (5) = (1) = ...$]

5. Naj bosta $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Napiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov. [$\alpha = (12)(45)(67)$, $\beta = (23847)(56)$]
(b) Napiši α in β kot produkt 2-ciklov (kot produkt transpozicij). [$\beta = (27)(24)(28)(23)(56)$]
(c) Določi α^{-1}, β^{-1}, α^{554} in β^{455}. [$\alpha^{554} = \mathrm{id}$, $\beta^{455} = (56)$]

6. (a) Permutaciji $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ napiši v obliki produkta ciklov. Določi α^{-1} in β^{-1}. [$\alpha = (12)(346)$, $\beta = (1523)(46)$, $\alpha^{-1} = (643)(12)$, $\beta^{-1} = (46)(3251)$]

(b) Dana sta dva elementa grupe S_8, $\alpha = (13)(27)(456)(8)$ in $\beta = (1237)(648)(5)$. Produkt $\alpha\beta$ napiši v obliko disjunktinih ciklov (v ciklični zapisi). Določi $(\alpha\beta)^{-1}$. [$(\alpha\beta)^{-1} = (56)(48)(2371)$]

7. (a) Pokaži, da se vsaka permutacija končne množice lahko napiše kot cikel ali kot produkt disjunktnih ciklov. [$a_1 \in A$, $a_2 = \alpha(a_1), a_3 = \alpha(a_2) = \alpha^2(a_1), ..., \alpha^m(a_1) = a_1$, $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m)(...)...$]

(b) Pokaži, da če je par ciklov $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m)$ in $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$ disjunktan, potem je $\alpha\beta = \beta\alpha$. [$S = \{a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ...b_n, c_1, c_2, ..., c_k\}$]

8. Naj bo S_n simetrična grupa. Identiteto $\mathrm{id} \in S_n$ zapiši kot produkt cikli dolžine 2 (kot produkt transpozicij). [$\mathrm{id} = (12)(12)$]

(b) Permutacije (12345) in (1632)(457) napiši kot produkt transpozicij.

[$(12345) = (15)(14)(13)(12)$]

9. Pokaži, da se vsaka permutacija v S_n ($n > 2$) lahko napiše kot produkt ciklov dolžine 2 (kot produkt transpozicij). [$(a_1, a_2, ..., a_k)(b_1, b_2, ..., b_t)(c_1, c_2, ..., c_s) = (a_1, a_k)...(a_1 a_2)(b_1, b_t)...(b_1, b_2)...(c_1, c_2)$]

Lema

Naj bo id identiteta grupe S_n. Če je $\mathrm{id} = \beta_1\beta_2...\beta_r$, kjer so β-i transpozicije, potem je r sodo število.

10. Dokaži Lemo zgoraj. [uporabi matematično indukcijo]

11. Naj bo α dana permutacija. Če je $\alpha = \beta_1\beta_2...\beta_r$ in $\alpha = \gamma_1\gamma_2...\gamma_s$ kjer so β-i in γ-i transpozicije. Pokaži, da sta r in s bodisi oba soda, bodisi oba liha.

[$\mathrm{id} = \gamma_1\gamma_2...\gamma_s\beta_r...\beta_2\beta_1$, uporabi zgoraj lemo]

Definicija (sode in lihe permutacije)

Permutacija $\alpha \in S_n$ je soda, če se lahko napiše kot produkt sodo mnogo transpozicij (tj. cikli oblike (ij)). Permutacija $\alpha \in S_n$ je liha, če ni soda.

12. Če je α soda permutacija, pokaži da je α^{-1} tudi soda. Če je α liha, pokaži da je α^{-1} tudi liha.

[$\alpha = \tau_1\tau_2...\tau_m$, $\alpha^{-1} = \tau_m\tau_{m-1}...\tau_1$]

13. Naj bo A_n množica vseh sodih permitacij iz grupe S_n. Pokaži, da je A_n grupa glede na operaciji kompozicije (tj. glede na operacijo ki je podedovana iz S_n). [$\mathrm{id} = (12)(12)$, $\alpha^{-1} \in A_n$]

Definicija (alternativna grupa reda n)

Grupo sodih permutacij na n elementih označujemo z A_n in imenujemo alternirajoča grupa reda n.

14. Ali lihe permutacije iz S_n oblikujejo grupo? Obrazloži svojo trditev. [Ne.]

15. Pokaži, da se permutacija (1234) ne more napisati kot produkt 3-ciklov, (kot produkt ciklov dolžine 3). [(1234) je liha permutacija]

16. (a) Določi vse elemente grup A_2, A_3 in A_4. Ali je katera od teh grup abelska? [$|A_4| = 12$]
(b) Določi in dokaži formulo za število elementov grupe A_n. [$|A_n| = n!/2$]

17. Pokaži, da je permutacija lihega reda vedno soda permutacija. (Z drugimi besedami, pokaži, da če ima $\alpha \in S_n$ lih red, te da je $\alpha \in A_n$). [$\alpha^{2n+1} = e$, $\alpha = \tau_1\tau_2...\tau_m$, ...]

18. Pokaži, da je funkcija iz končne množice S nase injekcija če in samo če je surjekcija. Ali je to res, če je S neskončna množica? [uporabi matematično indukcijo po velikosti množice]